Instituto de Matemática y Física
RB/CM/JE

Prueba Nº1

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[20 pts]** Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 \cdot y}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

   a) **[10 pts]** Determine si f es **continua** en $(1,0)$.

   b) **[10 pts]** Hallar el **plano tangente** Π en el punto $\left(2,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

2) **[20 pts]** Considere las funciones $u(x,y) = x^2y$ y $v(x,y) = x+4y$

   Suponga ahora que $f(u,v)$ es una función real desconocida, de la cual sólo se sabe que es diferenciable en $(2,9)$ y cumple con:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(2,9) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}(2,9) = 7$$

   Si $w(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ **calcule el valor de** A, en donde $A = \dfrac{\partial w}{\partial x}(1,2) + \dfrac{\partial w}{\partial y}(1,2)$

3) **[20 pts]** La temperatura en cada punto de una placa elíptica

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 2y^2 \leq 2\}$$

   viene dada por la función

$$T(x,y) = x^2 + y^2 - xy - y + 1$$

   a) **[10 pts]** Calcular la temperatura **mínima** en el interior de $\mathcal{D}$ y el punto en el que se alcanza.

   b) **[10 pts]** Hallar el punto de la frontera de $\mathcal{D}$ en el que la tasa de incremento de la temperatura en la dirección del vector $(1,1)$ es **máxima**.

   Ayuda : Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange.

Pauta :

1) *a)* En caso de f sea continua debemos probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0) = 0$$

Por trayectorias:

- Si $x = 1 \Rightarrow \lim_{y\to 0} f(1,y) = 0$
- Si $y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x,0) = 0$
- Si $y = x-1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x,x-1) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2\cdot(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} = 0$ **(3 pts)**

....

Sospechamos que el límite es 0 (cero). En efecto

$$\left|\frac{(x-1)^2\cdot y}{(x-1)^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{(x-1)^2\cdot y}{(x-1)^2+y^2}\right| \leq \frac{(x-1)^2\cdot|y|}{(x-1)^2} = |y|$$

(4 pts)

y $\lim_{(x,y)\to(1,0)} |y| = 0$, se tiene por el *Teorema del Sandwich* que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2\cdot y}{(x-1)^2+y^2} = 0 = f(1,0)$$

(2 pts)

Luego, $f(x,y)$ es continua en $(1,0)$. **(1 pto)**

....

b)

- $f_x(x,y) = \dfrac{2(x-1)y^3}{[(x-1)^2+y^2]^2} \Longrightarrow f_x(2,1) = \dfrac{1}{2}$ **(3 pts)**

- $f_y(x,y) = \dfrac{(x-1)^4 - y^2(x-1)^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} \Longrightarrow f_y(2,1) = 0$ **(3 pts)**

- $\Pi : z - \dfrac{1}{2} = f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1) \Longrightarrow \Pi : 2z - x = -1$ **(4 pts)**

....

2) Usando la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(u(1,2), v(1,2)\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(u(1,2), v(1,2)\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) && (\mathbf{3\,pts}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(2,9) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial v}(2,9) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) && (\mathbf{3\,pts}) \\
&= 7 \cdot 4 + 14 \cdot 1 = 42 && (\mathbf{2\,pts})
\end{aligned}$$

....

Análogamente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial y}(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(u(1,2), v(1,2)\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(u(1,2), v(1,2)\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(1,2) && (\mathbf{3\,pts}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(2,9) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial v}(2,9) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(1,2) && (\mathbf{3\,pts}) \\
&= 7 \cdot 1 + 14 \cdot 4 = 63 && (\mathbf{2\,pts})
\end{aligned}$$

....

Por lo tanto

$$A = \frac{\partial w}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial w}{\partial y}(1,2) = 42 + 63 = 105$$

(4 pts)

....

3) *a*)

- $\nabla T(x,y) = (T_x(x,y), T_y(x,y)) = (2x-y, 2x-x-1)$ **(2 pts)**
- Resolviendo el sistema

$$\nabla T(x,y) = (0,0) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x-y & = & 0 \\ 2y-x-1 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow P = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in \mathcal{D} \text{ pto crítico}$$

(3 pts)

- Como $H(1/3, 2/3) = 3 > 0$ y $f_{xx}(1,2) = 2 > 0$, la función tiene un **mínimo local**, el cual se alcanza en $(1/3, 2/3, T(1/3, 2/3)) = (1/3, 2/3, 2/3)$ **(5 pts)**

....

b) La tasa de incremento de T en la dirección del vector $\vec{u} = (1,1)$ viene dada por

$$D_{\vec{u}}T(x,y) = \nabla T(x,y) \cdot \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}(2x-y, 2y-x-1) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-1)$$

(2 pts)

Por tanto, nuestro objetivo es maximizar la función $F(x,y) = x+y-1$ sujeta a la restricción $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2$, a través del método de Multiplicadores de Lagrange, obtenemos el sistema no lineal.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla F & = & \lambda \nabla G \\ g(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 1 & = & 2\lambda x & (1) \\ 1 & = & 4\lambda y & (2) \\ x^2 + 2y^2 & = & 2 & (3) \end{array} \right.$$

(2 pts)

....

- Para $\lambda = 0, x \neq 0$ e $y \neq 0$, resulta en ambas ecuaciones que $1 = 0$ **(Contradicción!!)**
- Para $\lambda \neq 0, x \neq 0$ e $y \neq 0$, resulta de (1) y (2) que $x = 2y$. Sustituyendo en (3), se obtiene que $6y^2 = 1$ y por tanto $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **(2 pts)**

  Los posibles extremos son los puntos $P_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $P_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **(2 pts)**

....

Los valores de la función en los dos puntos obtenidos son:

- $F(P_1) = \sqrt{3} - 1$
- $F(P_2) = -\sqrt{3} - 1$

Por lo tanto, la tasa de **creciemiento máximo** en la dirección de $\vec{u}$, se alcanza en P_1. y vale $\frac{1}{\sqrt{2}}F(P_1) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \approx 0,517638$ **2 pts**

....